**به نام او**

**پاسخ تمرینات سری سوم – فصل سوم و چهارم**

۱. **روش اول:**

می‌توانیم در نظر بگیریم که B = [x y z] باشد. آنگاه می‌توانیم بگوییم:

و مطابق قوانین دترمینان داریم:

با توجه به ماتریس B متوجه می‌شویم که ستون‌های آن مستقل خطی هستند. در نتیجه ماتریس Bمعکوس پذیر است پس است. پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که دترمینان A می‌بایست صفر باشد.

**روش دوم:**

با توجه به بردارها داریم:

که می‌توانیم بگوییم:

چون سه بردار x و y و z مستقل خطی هستند پس ترکیب خطی آن‌ها با ضرایب موجود مخالف صفر است در نتیجه دترمینان A برابر صفر خواهد بود.

2. **روش اول:**

برای محاسبه‌ی مساحت متوازی‌الاضلاع از های مثلثی استفاده می‌کنیم که مساحت آن نصف مساحت متوازی الاضلاع است که این ها برابر (0,0) , (3,0) , (1,2) هستند.

با فرمول زیر مساحت این متوازی‌الاضلاع را بدست می‌آوریم:

که پس از انجام محاسبات A = 6 خواهد بود.

**روش دوم:**

می‌توانیم دترمینان [u v] یا [v u] را بدست آوریم که می‌دانیم قدرمطلق این مقادیر برابر مساحت متوازی‌الاضلاع است.

پس در این روش هم به مقدار 6 برای مساحت می‌رسیم.

3. می‌دانیم بردارهای مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر ماتریس نامنفرد یا معکوس‌پذیر باشد. یا به عبارتی دترمینان A مخالف صفر باشد.

بنابراین به ازای هر مقدار x بجز و ، بردارهای مستقل خطی خواهند بود.

4. الف) می‌دانیم یک ماتریس مانند A معکوس پذیر است، اگر و تنها اگر ماتریسی مانند B وجود داشته باشد که AB=I و BA=I، حال داریم:

ب) ابتدا با استفاده از تئوری 6 قسمت 3.2 () دترمینان بالا را تجزیه می‌کنیم.

همچنین چون پس داریم:

همچنین به راحتی مانند بالا قابل اثبات هست که و از طرفی داریم:

پس برای محاسبه ی دترمینان بالا تنها کافی است دترمینان B را بدست آوریم؛ که چون B یک ماتریس بالا مثلثی است، پس می‌شود و در نتیجه:

5. طبق تئوری ۸ داریم:

از طرفی با گسترش بر سطر اول دترمینان را بدست می‌آوریم:

درنتیجه:

پس می‌توان نتیجه گرفت که :

6.

*7.* الف) فرض کنید زیرفضاهای و و فضای برداری را در اختیار داریم. بردار صفر از به متعلق است زیرا صفر در هر دوی و موجود می‌باشد. (چون خودشان زیرفضا هستند) و 0 = 0+0 . همچنین اگر ۲ بردار در را انتخاب کنیم، برای مثال به طوریکه در و در باشند آنگاه داریم:

(جمع برداری در خواص جابجایی و شرکت‌پذیری را دارد)

حال میتوان گفت متعلق به و متعلق به است چراکه زیرفضا می‌باشند. این نشان می‌دهد که در است.

بنابر این میتوان گفت تحت جمع بسته است.

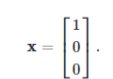
از طرفی در صورتی که عددی مثل داشته باشیم، می‌توان نوشت :

در اینجا بردار متعلق به است و متعلق به چراکه زیرفضا می‌باشند. پس می‌توان نتیجه گرفت متعلق به است پس تحت ضرب عدد اسکالر در بردار نیز بسته است.

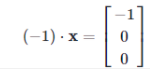
در این حالت می‌توان گفت از آنجاییکه هر ۳ ویژگی را داراست یک زیرفضا از می‌باشد.

ب)‌ واضح است که یک زیرفضا از است؛ چراکه هر بردار در را می‌توان به فرم نوشت که در آن بردار صفر در است. (و همچنین در )

از آنجاییکه H شامل بردار صفر در است و H تحت جمع برداری و ضرب عدد در بردار بسته است (چون یک زیرفضا از است)، آنگاه یک زیرفضا از نیز می‌باشد. به طور مشابه می‌توان اثبات کرد که نیز یک زیرفضا از است.

*8.* برای این سوال کافیست مثال نقض مناسب پیدا کنیم.

الف) بردار زیر را در نظر بگیرید

از آنجاییکه ، بردار در قرار دارد. سپس عدد را در این بردار ضرب می‌کنیم:

همان طور که میتوان مشاهده نمود، درایه اول -1 می‌شود که دراینجا در قرار ندارد. پس تحت ضرب عدد در بردار بسته نیست و زیرفضا نمی‌باشد.

ب) بردار صفر را در نظر بگیرید:

از آنجاییکه بردار صفر در رابطه مربوط به صدق نمی‌کند می‌توان گفت که شامل بردار صفر نمی‌باشد، بنابراین یک زیرفضا نیست.

ج) بردار های زیر را در نظر بگیرید:

این بردار ها در قرار دارند چرا که هر دو در رابطه مربوطه صدق می‌کنند. اگر این دو بردار را جمع کنیم داریم:



که واصح است در رابطه صدق نمی‌کند و در قرار ندارد. از آنجاییکه تحت جمع برداری بسته نیست پس یک زیرفضا نمی‌باشد.

9. الف) برای هر در و هر عدد داریم:



و

بنابراین T یک تبدیل خطی است.

ب) فرض کنید هر المانی در باشد به طوریکه و آنگاه داریم:

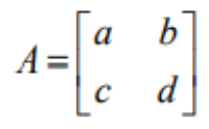


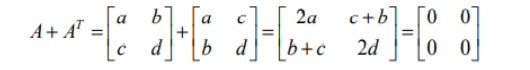
ج) در بخش ب نشان دادیم که شامل مجموعه تمام هایی در است که . باید نشان دهیم که هر در این ویژگی را داراست.

فرض کنید در باشد و B=T(A) برای یک A در برقرار باشد. آنگاه B = و :

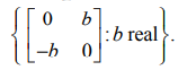


پس B دارای ویژگی می‌باشد.

د) فرض کنید در کرنل بوده و و



داریم:



با حل معادله بالا می‌توان فهمید که و . بنابر این کرنل T برابر است با:

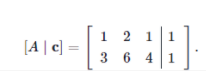
*10.* بردار را در نظر می‌گیریم. از آنجاییکه این بردار 3-dimensional است نمی‌تواند در ماتریس باشد و همچنین داریم:

پس بردار در ماتریس نیز حضور ندارد.

سپس بردار را در نظر می‌گیریم. به طور مشابه این بردار نیز 3-dimensional است. بنابراین در حضور ندارد. همچنین داریم:

پس میتوان گفت که در هست.

در نهایت بردار را در نظر می‌گیریم. این بردار 2-dimensional است پس این بردار در حضور ندارد.

برای آنکه تعیین کنیم c در هست یا نه نیاز است تا بررسی کنیم که سیستم دارای جواب است یا خیر. ماتریس افزوده این معادله را تشکیل می‌دهیم و عملیات ردیفی را پیاده‌سازی می‌کنیم. داریم:



از آنجاییکه معادله دارای جواب است پس می‌توان گفت که در هست.

*11.* با توجه به تعاریف داریم :

و این مجموع خودش یک می‌باشد.

فرض می‌کنیم و پایه برای زیرفضای و

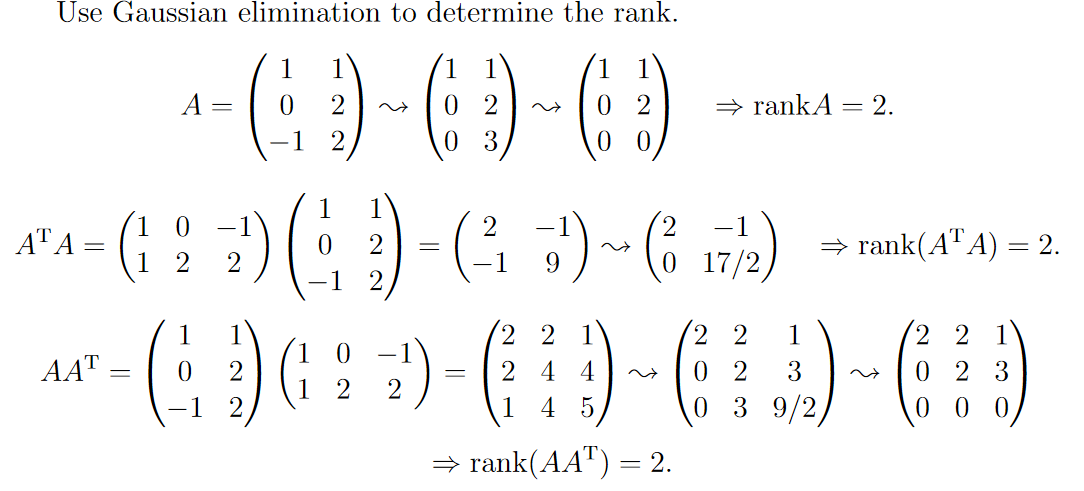
برای زیرفضای در نظر می‌گیریم.

حال یک بردار تصادفی را از زیر فضای و بردار از زیر فضای انتخاب می‌کنیم که به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

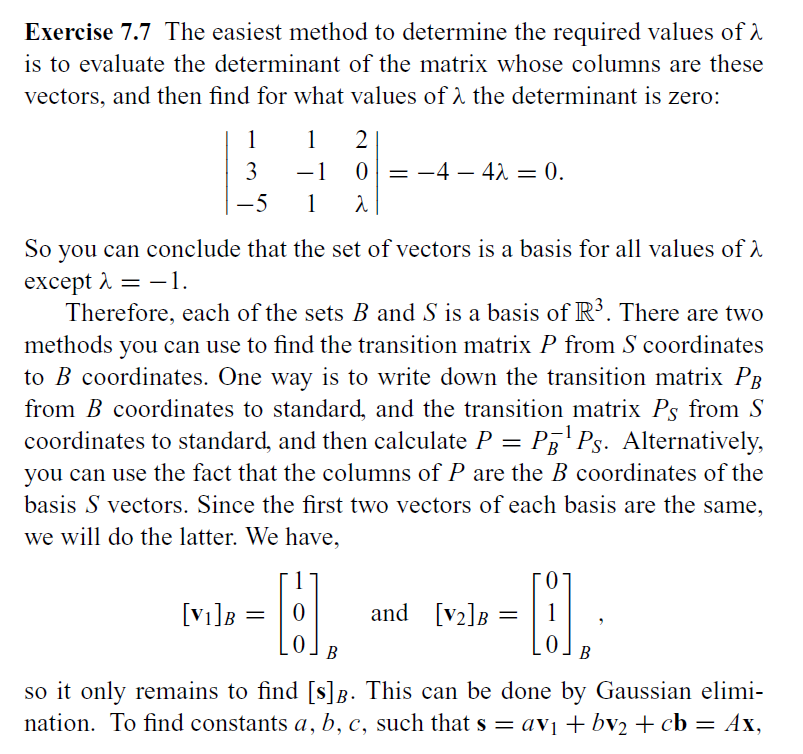
که ها و ها اعداد اسکالر هستند.

و از انجایی که بردارهای دلخواهی بودند پس می‌توان نوشت عضوی از

می‌باشد پس زیرمجموعه این فضاست. حال می‌دانیم که اعضای نوشته شده در ممکن است نسبت به هم مستقل نباشند و بتوان برخی از آن ها را به صورت مجموع چندی دیگر نوشت پس بدون اینکه کلیتی از تعریف از دست بدهیم می‌توانیم اعضایی از آن حذف کنیم پس ماکسیمم سایز برابر با مجموع است و در حالتی از این کمتر خواهد شد ولی هرگز بیشتر نخواهد بود پس می‌توان نوشت :

*12. ماتریس را به فرم نردبانی تبدیل می‌کنیم تا آن را بدست آوریم:*

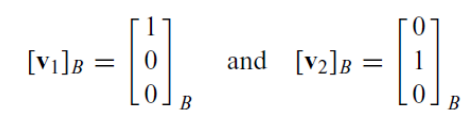
*می‌توان نشان داد که رابطه‌ی برای هر ماتریس (نه لزوماً ماتریس‌های مربعی) برقرار است.*

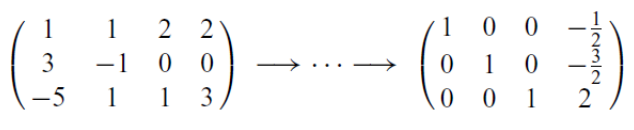
*13. الف) بهترین راه این است که دترمینان ماتریسی را بدست آوریم که ستون‌هایش بردارهای هستند و مقادیری را برای* بدست آوریم که به ازای آن‌ها دترمینان برابر صفر خواهد شد:

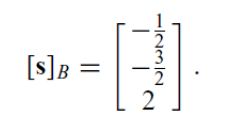
می‌توان نتیجه گرفت مجموعه بردارهای تنها به ازای تشکیل پایه برای نمی‌دهند.

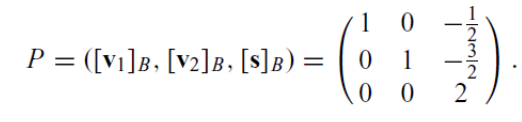
ب) فرض کنید و . در اینصورت با استفاده از قسمت الف، مشخص است که و پایه‌هایی برای هستند.

ج) بردارهای در هر دو پایه وجود دارند و برابرند. بنابراین می‌توان گفت:

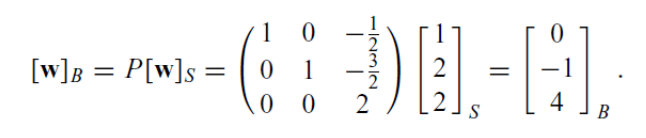


پس کافیست را محاسبه کنیم. برای اینکار باید ضرایب را در معادله‌ی بدست آوریم. برای اینکار ماتریس افروده زیر را تشکیل می‌دهیم:

بنابراین نتیجه می‌شود:

پس ماتریس تبدیل از پایه به برابر است با:

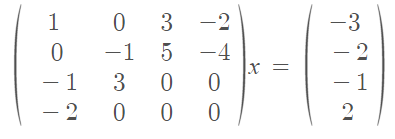
و می‌توان به راحتی را محاسبه کرد:



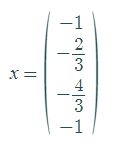
14. الف) برای حل این سوال می‌توانیم ضرایب را پشت سر هر ماتریس(یک بردار از پایه) بگذاریم و درایه‌های نظیر را جمع بزنیم و سپس معادله را حل کنیم. برای مثال فرض کنید ما میخواهیم درایه  را بسازیم برا اینکار با توجه به پایه خواهیم داشت ) ضریب می‌باشد) :

و اگر برای هر 4 درایه اینکار را انجام دهیم به 4 معادله و 4 مجهول می‌رسیم که به راحتی قابل حل می‌باشد و مقادیر بردار که همان مختصات ما بر اساس پایه مورد نظر است، پیدا می‌کنیم.

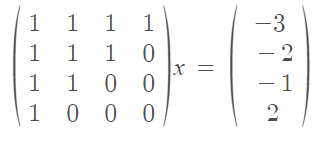
و معادله ما به شکل زیر در می‌آید :



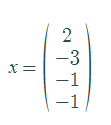
که با حل این معادله به جواب زیر می‌رسیم :



حال مراحل بالا را برای پایه نیز تکرار می‌کنیم و معادله برای این پایه به شکل زیر خواهد بود:

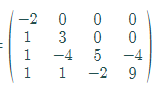


که با حل به جواب زیر می‌رسیم :



ب) برای حل این قسمت باید هر ماتریس در پایه را بر اساس ماتریس‌های پایه بنویسیم. می‌توانیم رویه قسمت قبل را در پیش بگیریم و 4 بار روند تشکیل ماتریس را انجام دهیم ولی اگر کمی به ساختار ماتریس های پایه نگاه کنیم، در می‌یابیم که با اولویت‌بندی بین آن‌ها به راحتی می‌توانیم اینکار را بدون تشکیل معادله انجام دهیم. برای مثال برای ایجاد درایه  فقط اولین ماتریس () نقش دارد؛ پس با مشخص‌کردن ضریب این ماتریس به سراغ ماتریس بعدی می‌رویم و در گام بعد هم می‌بینیم برای  فقط ماتریس‌های اول و دوم نقش دارند که ما ضریب اولی را مشخص کردیم پس فقط باید ضریب دومی را مشخص کنیم و با ادامه همین روال تمام ضرایب برای ما مشخص می‌شود:

میدانیم که هر یک ستون از ماتریس انتقال است و با کنار هم قرار دادن ستون‌ها به ماتریس زیر می‌رسیم:



موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

بهار 1400